

# FREGE

PHI-3710

Séance 3

Professeur Jonathan Simon

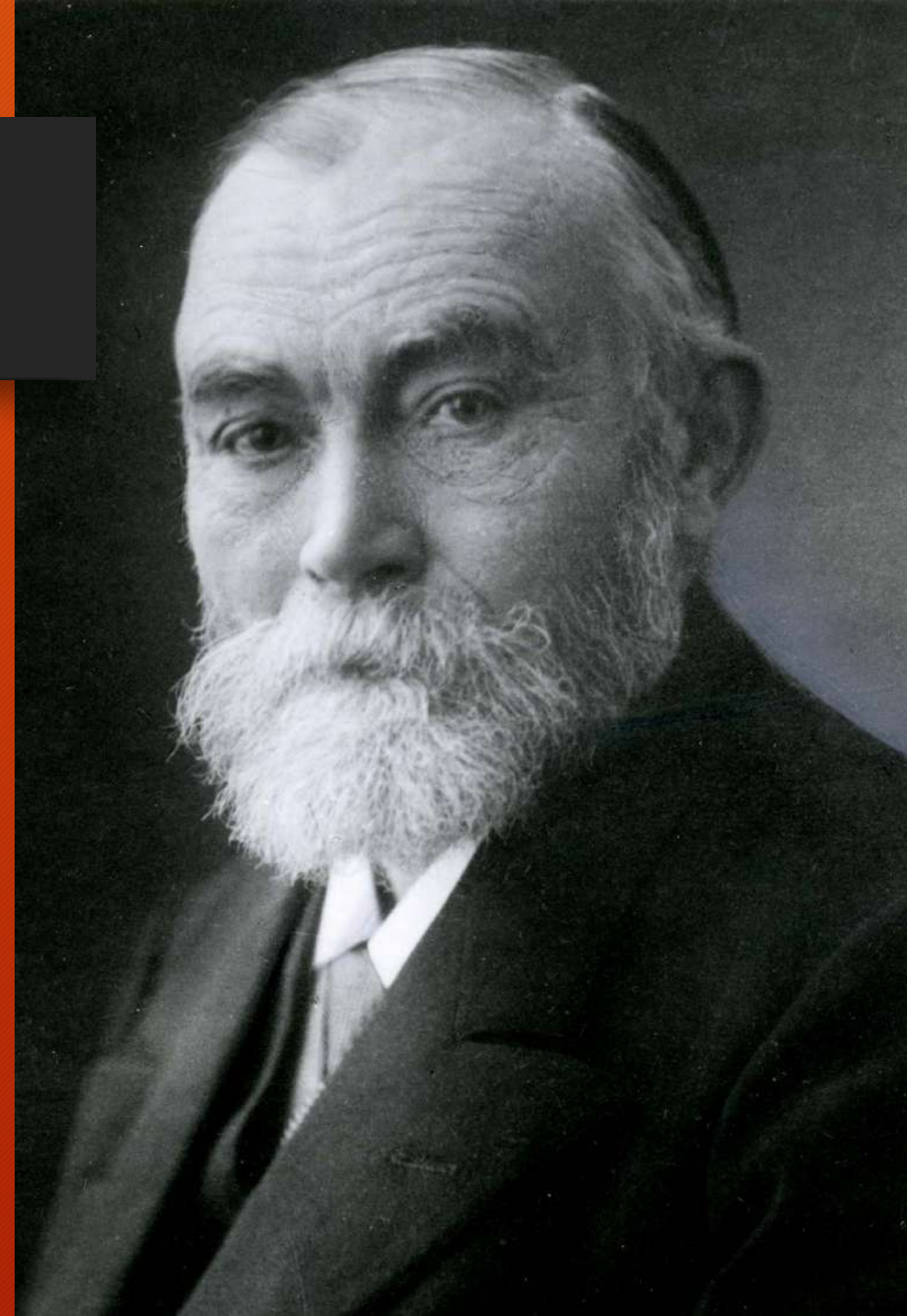
# Plan du jour

- 1) La Begriffsschrift : la logique comme langage universel
- 2) Sens et référence - une approche anti-psychologiste  
(le langage comme logique)
- 3) Fondements logiques des mathématiques
- 4) Le paradoxe de Russell

# Le Begriffsschrift

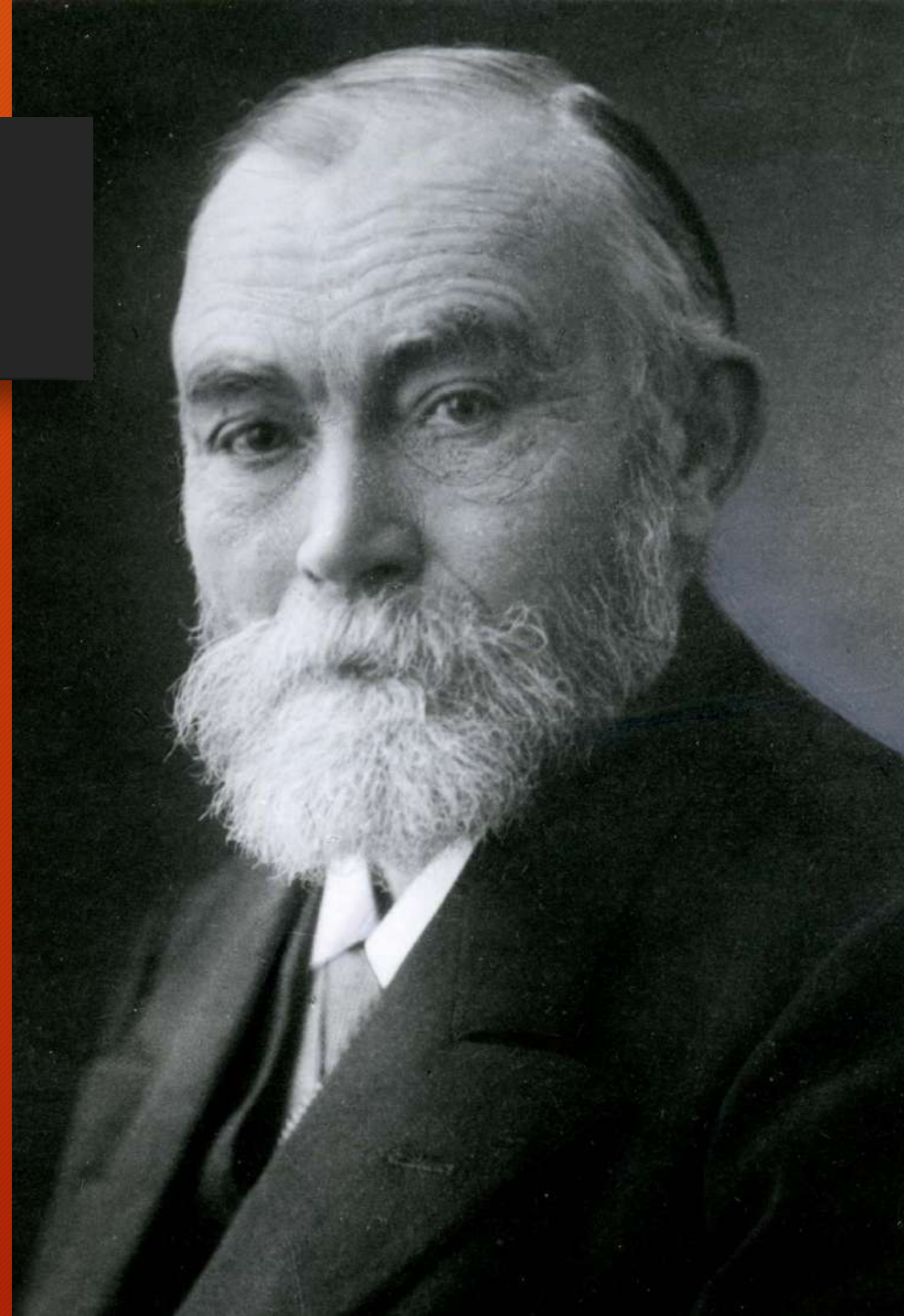
# Gottlob Frege

- 1848 - 1925
- Doctorat en mathématique: 1873
- Habilitationsschrift: 1874
- Begriffsschrift: 1879
- Die Grundlagen der Arithmetik: 1884
- Über Sinn und Bedeutung: 1892
- Grundgesetze der Arithmetik: 1893/1903



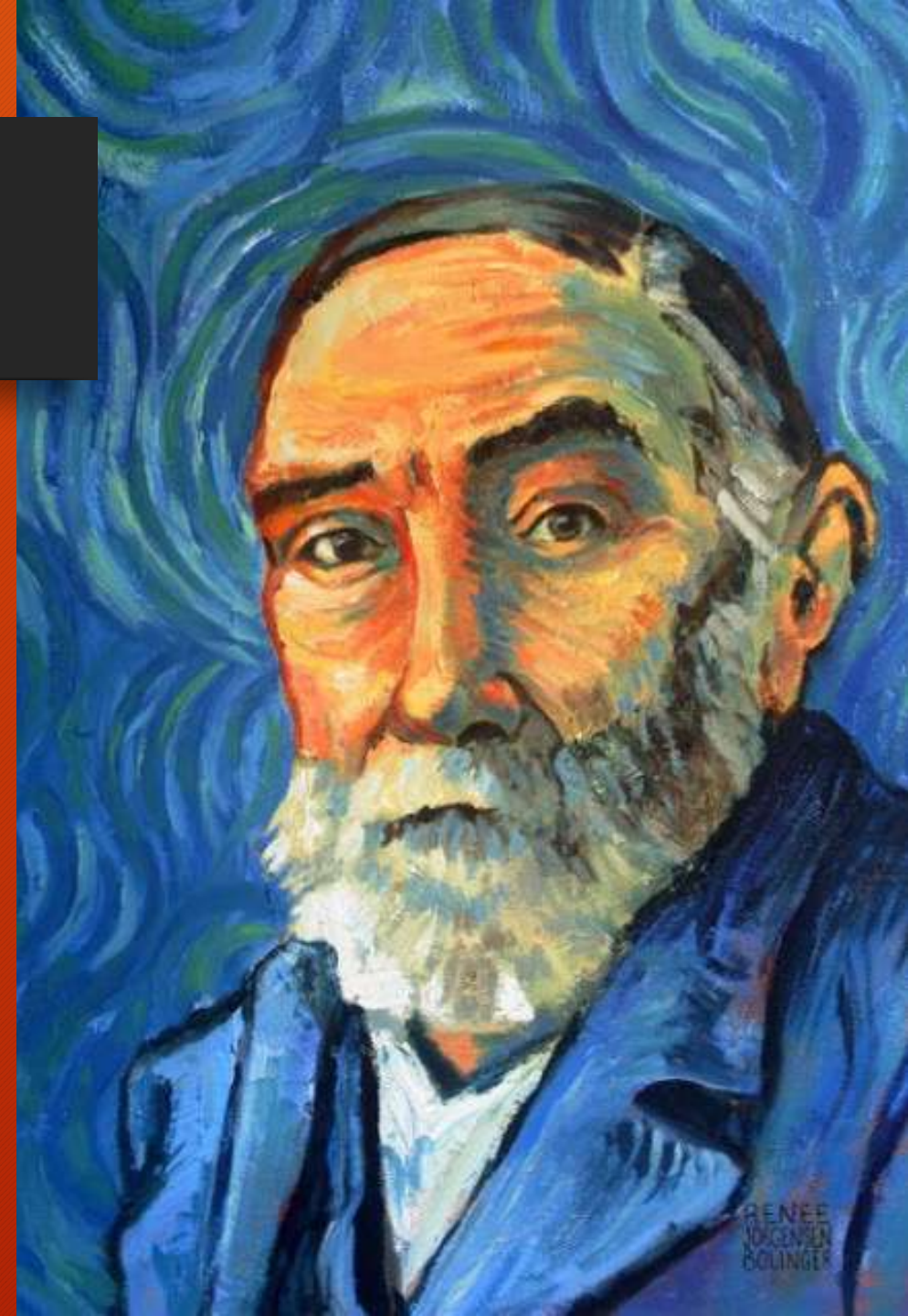
# Gottlob Frege

- Un contexte plus large :
- En logique et en mathématiques :  
Riemann, Weiertrauss, Cantor, Boole, Venn...
- En philosophie et en psychologie : néo-kantianisme romantique, école de la gestalt...



# Gottlob Frege

- Sur le plan humain, bien qu'il ait été à l'aise, sa vie a été triste : son travail n'a pas été apprécié pendant sa vie, ses deux enfants sont morts jeunes et il ne s'est jamais remis du paradoxe de Russell (bien qu'il l'ait accepté avec grâce, du moins jusqu'à la fin...).
- ...Il est aujourd'hui considéré comme le père de la philosophie analytique. Ses travaux en logique et en philosophie du langage et des mathématiques ont une grande influence...



# Frege

- Doctorat, mathématique, 1873: Sur une représentation géométrique des formes imaginaires dans le plan".
- Habilitationsschrift, mathématique, 1874: Méthodes de calcul basées sur une extension du concept de quantite

# Frege

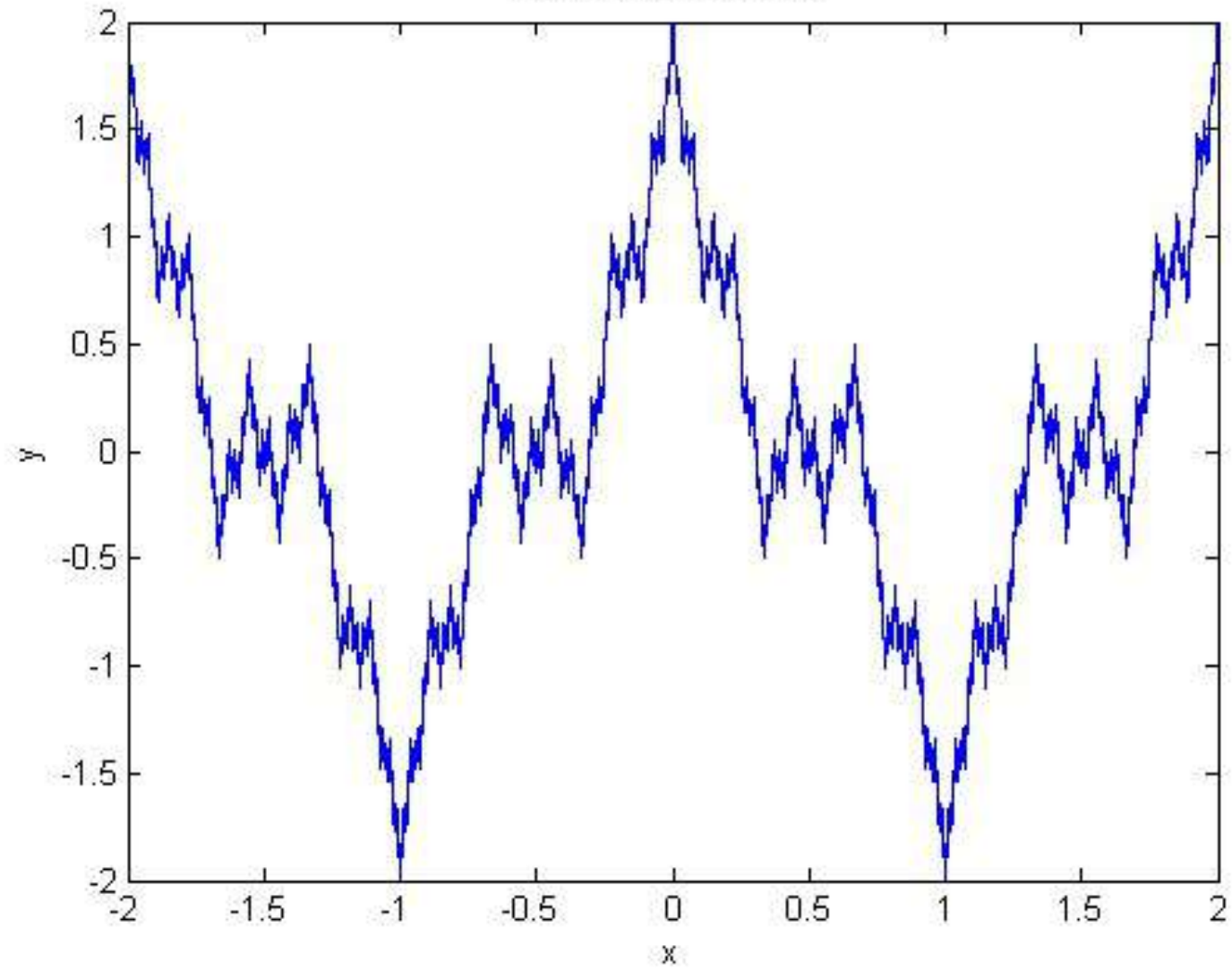
- - "Les éléments de toutes les constructions géométriques sont des intuitions, et la géométrie se réfère à l'intuition comme source de ses axiomes. Puisque l'objet de l'arithmétique n'a pas n'a pas de caractère intuitif, ses propositions fondamentales ne peuvent pas provenir de l'intuition. l'intuition". (Frege 1874, traduction dans McGuinness (ed.) 1984, 56)
- - Cela signifie que notre connaissance de la géométrie et de l'arithmétique provient de sources différentes.



# Begriffsschrift

- Les questions mathématiques sur lesquelles il a travaillé :
- 1) La nature des fonctions : faut-il les prendre comme primitives ou comme analysées en termes d'autres objets mathématiques ? (Riemann v Weierstrauss)
- 2) Le rôle propre de l'intuition (cas où les conceptions algébriques remplacent l'intuition, par exemple, la notion de grandeur donnée par les nombres complexes, les fonctions qui sont partout continues mais nulle part différentiables).

Weierstrass Function



# Le Begriffsschrift

- La Begriffsschrift est née de la tentative de Frege de trouver une base logique à l'arithmétique (logicisme)...
- Cela contraste avec la conception néo-kantienne de l'arithmétique, fondée sur l'intuition pure du temps...

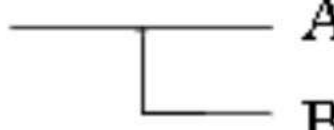


# Le Begriffsschrift

- "Pour que quelque chose d'intuitif ne puisse pas s'introduire ici sans être remarqué, il était très important de maintenir la chaîne des raisonnements sans lacunes. En m'efforçant de remplir cette exigence au plus haut degré, j'ai trouvé un obstacle dans l'insuffisance de la langue ; malgré toute la lourdeur des expressions, plus les relations devenaient complexes, moins la précision - que mon but exigeait - pouvait être obtenue. De cette insuffisance est née l'idée de la "notation conceptuelle"." (Préface)

# Le Begriffsschrift



- Son objectif était donc de développer une langue universelle artificielle mais parfaitement précise (dans l'esprit de Leibniz, qui voulait concevoir une "characteristica universalis" dans ce sens) :
- ...Un système de raisonnement capable de montrer les liens entre les énoncés, et de calculer les conséquences de tout énoncé de la langue universelle.

Basic concept	Frege's notation	Modern notations
Judging	$\vdash A, \Vdash A$	$p(A) = 1$ $p(A) = i$
Negation	$\neg A$	$\neg A; \sim A$
Conditional (implication)		$B \rightarrow A$ $B \supset A$
Universal quantification		$\forall y: \Phi(y)$
Existential quantification		$\exists y: \Phi(y)$
Content identity (equal sign)	$A \equiv B$	$A = B$

# Le Begriffsschrift

Les développements les plus importants dans le Begriffsschrift et le Grundlagen :

- 1) Le passage de la conception sujet / prédicat des vérités à la conception argument / fonction.
- 2) L'idée que les vérités logiques sont vraies en vertu de leur forme (logique) ou de leur syntaxe.
- 3) L'idée que l'" atome " de l'évaluation sémantique est la phrase, et non le sujet et le prédicat.
- 4) Quantification multiple, connecteurs logiques comme fonctions de vérité ...

# Le Begriffsschrift

1) Le passage de la conception sujet / prédicat des vérités à la conception argument / fonction.

Les fonctions mathématiques transforment des arguments (termes, par exemple, des nombres) en d'autres arguments :

la fonction unaire (à une place) " $\_+7$ " fait correspondre l'argument " 1 " à l'argument " 8  
...

la fonction binaire (à deux places) " $\_+_$ " fait correspondre deux nombres à leur somme, c'est-à-dire qu'elle fait correspondre 3 et 5 à 8...



# Le Begriffsschrift

1) Le passage de la conception sujet / prédicat des vérités à la conception argument / fonction.

L'innovation de Frege consiste à considérer tous les concepts (comme le concept "   est heureux" ou le concept "   aime   ") comme des fonctions...

Si c'est le cas, à quoi correspondent-ils ?

**Réponse : les valeurs de vérité : Le Vrai, le Faux**

# Le Begriffsschrift

1) Le passage de la conception sujet / prédicat des vérités à la conception argument / fonction.

Réponse : les valeurs de vérité : Le Vrai, le Faux

Les concepts sont des fonctions allant des arguments (noms) aux valeurs de vérité.

# Le Begriffsschrift

2) L'idée que les vérités logiques sont vraies en vertu de leur forme (logique) ou de leur syntaxe, connecteurs logiques comme fonctions de vérité ...

La première idée conduit aux autres. Si les concepts "atomiques" sont des fonctions allant des arguments aux valeurs de vérité, les concepts logiquement complexes sont des manières spécifiables de modifier ces fonctions.

par exemple, la "négation" inverse le signe, de sorte que si une fonction donnée fait correspondre un argument donné à V, la négation de cette fonction fait correspondre cet argument à F.

Intuitive Significance	Functional Expression	The Function It Signifies
Statement	$\neg ()$	The function which maps The True to The True and maps all other objects to The False; used to express the thought that the argument of the function is a true statement.
Negation	$\neg ()$	The function which maps The True to The False and maps all other objects to The True
Conditional	$\begin{matrix} \top \\ \perp \end{matrix} ()$	The function which maps a pair of objects to The False if the first (i.e., named in the bottom branch) is The True and the second isn't The True, and maps all other pairs of objects to The True
Generality	$\neg^a \Phi(a)$	The second-level function which maps a first-level concept $\Phi$ to The True if $\Phi$ maps every object to The True; otherwise it maps $\Phi$ to The False.

# Le Begriffsschrift

3) L'idée que l'" atome " de l'évaluation sémantique est la phrase, et non le sujet et le prédicat.

-- Sur le modèle sujet / prédicat, le sujet nomme une chose particulière, le prédicat nomme une chose universelle : on détermine d'abord la référence de chacun, séparément, puis on évalue si l'un instancie l'autre, une relation supplémentaire entre les deux (cf. régression de Bradley).

# Le Begriffsschrift

3) L'idée que l'" atome " de l'évaluation sémantique est la phrase, et non le sujet et le prédicat.

Dans l'approche fonction/argument, le concept est juste une carte des arguments aux valeurs de vérité (uniquement définie en termes de toutes ses valeurs), et l'unité primaire de référence est la phrase, qui se réfère à V ou F...

# Le Begriffsschrift

## 4) Quantification multiple

Le quantificateur universel est la fonction / le concept de deuxième niveau qui fait correspondre une fonction / un concept de premier niveau  $\Phi$  au Vrai si  $\Phi$  fait correspondre chaque objet au Vrai ; sinon, il fait correspondre  $\Phi$  au Faux.

# Le Begriffsschrift

## 4) Quantification multiple

Cela lui permet de combiner et d'itérer les quantificateurs, et s'étend naturellement à la quantification d'ordre supérieur (quantification sur les fonctions)



# Sens et référence

# Sens et référence

- Notez que dans l'approche fonctionnelle de la vérité, les concepts (prédicats) qui sont vrais sur tous les mêmes arguments sont équivalents (équivalence matérielle).
- Mais intuitivement, il peut y avoir des différences entre des concepts qui s'accordent de cette manière, par exemple "Être un polygone équiangulaire" et "Être un polygone équilatéral"...

# Sens et référence

- Un exemple connexe.
- L'étoile du matin = l'étoile du soir vs
- l'étoile du matin = l'étoile du matin

# Sens et référence

- Le problème : l'une de ces identités est cognitivement significative mais pas l'autre. Cependant, leurs significations sont données par le fait que les termes se réfèrent à la même chose et que l'assertion est mise en correspondance avec le Vrai
- Alors rien n'explique la différence...

# Sens et référence

- Un second problème, lié au premier, est que si  $a$  fait référence à la même chose que  $b$ , et que " $F(a)$ " est vrai, alors " $F(b)$ " - le résultat de la substitution de  $b$  à  $a$  dans  $F()$  - sera vrai.
- Mais réfléchissez :
- Lois croit que Clark Kent est Clark Kent (V).
- Lois croit que Clark Kent est Superman (F)

# Sens et référence

- Autres contraintes : Frege veut éviter le psychologisme ... il ne veut pas revenir à une théorie selon laquelle nos états mentaux ou nos idées intérieures déterminent le sens (il pense que cela rendrait la communication intersubjective impossible).

# Sens et référence

- La solution : les termes (tant pour les individus que pour les concepts) se réfèrent à ce à quoi ils se réfèrent (individus, et fonctions des individus aux valeurs de vérité) au moyen de "sens" : "règles" abstraites de référence.

# Sens et référence

- "l'étoile du matin" et "l'étoile du soir" ont le même référent (Vénus) mais des sens différents.
- "Être équilatéral" et "Être équiangulaire" ont également le même référent (une certaine fonction reliant des polygones égaux au Vrai) mais des sens différents.....
- Dans l'ascription de croyance (Lois croit...) le référent du terme "que Clark Kent est Superman" est le sens donné par ces termes...



# Sens et référence

- Alors, qu'est-ce que les sens, exactement, et en quoi diffèrent-ils des éléments mentaux / idées ?
- - Ils vivent dans le "troisième royaume", c'est-à-dire au même endroit que les abstractions mathématiques, et non dans notre tête...

# Les fondements logiques des mathématiques

# Les fondements logiques des mathématiques

- Dès le départ, l'ambition de Frege était de montrer que toutes les mathématiques, à commencer par l'algèbre, peuvent être fondées sur la logique - les mathématiques sont tout simplement de la logique.
- (Cela a mis Frege en désaccord avec de nombreux logiciens contemporains, comme Boole, qui voyaient la logique comme une branche des mathématiques).

# Les fondements logiques des mathématiques

- Les spécificités de l'approche de Frege sont intéressantes, mais le point le plus important est la méthodologie : l'idée que la logique peut jouer un rôle fondamental profond - cette idée a été très influente...

# Les fondements logiques des mathématiques

- Cours de valeurs / extensions :
- L'idée clé est qu'une fonction  $F$  garde la trace de tous les objets qu'elle met en correspondance avec le Vrai et que vous pouvez considérer ceux-ci, collectivement, comme un objet spécial (le cours de valeurs ou l'extension de  $F$ ).

# Les fondements logiques des mathématiques

- Frege met cette idée en pratique : pour ceux qui sont familiers avec la théorie des ensembles, notez la correspondance entre l'idée d'une extension et l'idée d'un ensemble
- Mais cela dépend des principes spécifiques que votre théorie accepte : quelles sont les règles qui vous permettent de "créer" de nouveaux ensembles / classes / etc ?

# Les fondements logiques des mathématiques

- Frege soutient qu'à chaque concept correspond une extension (même pour les concepts incohérents : ils correspondent à l'extension nulle)
- Notez que puisque les concepts sont des objets (fonctions), ils peuvent être contenus dans leurs propres extensions. Considérons le concept " Fonction qui fait correspondre des arguments à des valeurs de vérité "
- .... On revient à cela...

# Les fondements logiques des mathématiques

- Application : une définition du nombre :
  - 1) On peut définir ce que c'est pour un concept d'avoir exactement deux éléments dans son extension : pour qu'il y ait deux choses,  $x$  et  $y$ , dans l'extension, telles que  $x$  n'est pas égal à  $y$ , mais tout ce qui est dans l'extension est soit égal à  $x$ , soit égal à  $y$ .
  - 2) Alors "le nombre deux" est l'extension du concept "Concept ayant exactement deux éléments dans son extension"...



# Les fondements logiques des mathématiques

- Définition de "précède immédiatement" :
- *x précède (immédiatement) y:*
- Prenez tout concept  $F$  (avec une extension finie) et toute entité  $z$  telle que  $F(z) = \text{Vrai}$ .
- Nous pouvons alors définir un nouveau concept  $F^* : = \text{"Être un } F \text{ qui n'est pas } z\text{"}$ .

# Les fondements logiques des mathématiques

- Définition de "précède immédiatement" :
- $x$  précède (immédiatement)  $y =$

Il existe un concept  $F$  et un objet  $z$  tels que :

- 1)  $F(z)$ ,
- 2)  $y$  est le nombre du concept  $F$   
et
- 3)  $x$  est le nombre du concept  $F^* =$  " objet qui est un  $F$  non égal à  $z$  ".

# Le Paradoxe de Russell

# Le Paradoxe de Russell

- Considérons la phrase menteuse,  $A = \ll A \text{ n'est pas vraie} \gg$  («Cette phrase n'est pas vraie») :
- est-elle vraie, ou fausse ?
- Si elle est fausse, elle est vraie. Si elle est vraie, elle est fausse !

# Le Paradoxe de Russell

- Nous avons noté que les concepts peuvent être dans leurs propres extensions. ("Être un concept...")
- Considérons maintenant :
- "Être un concept qui n'est pas dans sa propre extension"...
- (être un prédicat qui ne se décrit pas lui-même)!

# Le Paradoxe de Russell

- Est-ce qu'elle est dans sa propre extension, ou non ?
- Si oui, non, et si non, oui!

# Le Paradoxe de Russell

- Remarque : il existe de nombreuses versions de ce paradoxe :
- L'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas membres d'eux-mêmes
- La caractéristique d'être une caractéristique qui n'est pas une caractéristique d'elle-même.
- Le prédicat "Ne décrit pas vraiment lui-même (x)".

# Le Paradoxe de Russell

- Cependant, dans un système logique donné, celles que l'on peut formuler dépendent des ressources expressives de chacun.
- Par exemple, la version prédicative nécessite une manière de dire capturant l'idée qu'un prédicat parle de lui-même
- Devoirs pour ce week-end: essayer d'exprimer ceci dans le langage du système de Frege sans faire appel aux extensions.



# Le Paradoxe de Russell

- Indice : vous ne pouvez pas, parce que les variables dans le langage peuvent occuper la position d'argument (position de sujet) ou la position de fonction (position de prédicat) mais pas les deux, donc vous ne pouvez pas dire "Un X tel que  $X(X)$ "...
- Les langages dotés d'un mécanisme permettant de faire cela conduiraient à une version du paradoxe sans extensions.... mais pour Frege, c'est sa théorie des extensions qui rend cela possible (car on peut parler d'un X (concept) tel que l'extension-de-X (objet) ne satisfait pas X (concept))

# Le Paradoxe de Russell

- L'arithmétique s'effondre !
- Que faire ? Théorie des types - ou restreindre le principe de "compréhension" qui permet des objets (extensions) pour chaque concept.....